Seminarios del Doctorado en Ciencias Exactas e Ingeniería 2024

Título de Tesis: EL ESPACIO DE ESTRUCTURAS DE ÁLGEBRAS DE LIE

Tesista: Mg. Estela Fátima Fernández

Director: Dr. Paulo Andrés Tirao

Resumen

Una de las estructuras algebraicas más importantes, después de los grupos y los espacios vectoriales, es la de un *álgebra*. La diversidad de tipos y familias especiales de álgebras que hay en matemática es inmensa. Las hay conmutativas o no conmutativas, asociativas o no asociativas; las hay de dimensión finita o de dimensión infinita. Luego hay clases o familias de álgebras muy relevantes en distintos contextos, entre ellas las *álgebras de Lie*.
Uno de los problemas centrales de cualquier teoría algebraica es el de *clasificar* sus objetos, salvo *isomorfismos*. En general es un problema muy difícil y resuelto en unos pocos casos.El caso más sencillo es el de los espacios vectoriales de dimensión finita, que están clasificados por su dimensión. Un caso de enorme relevancia para la matemática es el de los grupos finitos simples, cuya clasificación se terminó recientemente y ocuparía unas 10.000 páginas escritas por unos 100 autores. Cabe mencionar que una de las clases de grupos finitos simples, es la de grupos de tipo Lie. Un álgebra de dimensión finita □, de cualquier tipo, sobre un cuerpo □ es una aplicación bilineal, μ de □[□]. Por lo tanto, fijada una base, {□$_1$, …, □$_□$}, de □[□], μ queda totalmente determinada por sus coeficientes de estructura □[□]$_{□,□}$ dados por μ(□$_□$ □$_□$) = $\sum_{□=1}^{□}$ □$_{□,□}$ □$_□$. Así podemos ver al álgebra μ como un punto en □[□^{3}]. El conjunto de todos los puntos de □[□^{3}] que representan a un álgebra de algún tipo o clase, forman en general una *variedad algebraica*, un objeto de la *geometría algebraica* que denotamos L. Ahora, como en una base distinta los coeficientes de μ serán otros, hay un conjunto de puntos de L que representan álgebras isomorfas; éste conjunto es exactamente la *órbita* de μ bajo la acción del grupo □□(□, □) dada por cambio de base. Este punto de vista resulta muy interesante y permite abordar el problema de clasificación con todas las herramientas de la geometría algebraica.
Con la topología heredada de □[□^{3}], con □ = $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, un entorno de un álgebra dada μ en L, está formado por todas las álgebras de Lie cuyos coeficientes de estructuras son pequeñas perturbaciones de los coeficientes de μ . Un álgebra de Lie μ es rígida si su órbita es abierta es decir si todas las álgebras de Lie cercanas son isomorfas, es decir es una componente irreducible de L, para la clasificación esto resulta relevante. La cohomología es un invariante multilineal sofisticado que se calcula a través de un complejo en el álgebra exterior. Si el segundo grupo de cohomología adjunta de un álgebra de Lie, □^{2}, es 0 entonces es rígida.
Ejemplos novedosos: Sea □$_0$, el álgebra de Lie, producto semidirecto de □□(□, $\mathbb{C}$) por su representación estándar □$_0$ = □□(□, $\mathbb{C}$) ⋉ $\mathbb{C}$, □ ≥ 2, se probó que □^{2}(□$_0$, □$_0$) = 0. A continuación se consideró el álgebra de Lie □$_□$ = □$_0$ ⊕ $\mathbb{C}$, y se probó que □$_□$ no es rígida. Más aún, se demostró que para □ ≥ 3 tiene un único 2 cociclo, σ , y que la correspondiente deformación lineal □$_□$(□) = □$_□$ + □□ es rígida. Esto constituye un descubrimiento original y un resultado relevante y no trivial.